Задача 5.2. Имеются выборочные данные (табл. 9) показателей «Объем продукции» (x, тыс. штук) и «Единичные издержки» (y, тыс. руб).

Таблица 9

№ наблюдения	Единичные издержки	Объем продукции	№ наблюдения	Единичные издержки	Объем продукции
1	10,3	48	9	12,5	22
2	10,5	38	10	12,6	30
3	10,6	43	11	13	25
4	10,7	50	12	13,9	25
5	11	33	13	14,4	22
6	11,5	28	14	15,2	21
7	12	35	15	16	20
8	12,2	28			

Требуется:

1) Построить регрессионные уравнения зависимости единичных издержек от объема произведенной продукции:

степенное $\hat{y} = b_0 \cdot x^{b1}$;

показательное $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^x$;

гиперболическое $\hat{y} = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$.

2) Для каждого уравнения регрессии:

оценить тесноту нелинейных связей;

оценить качество уравнения;

найти средние и частные коэффициенты эластичности.

3) Выбрать наилучшее уравнение.

Решение.

Объем выборки n = 15, число независимых переменных (факторов) m = 1.

Степенная регрессия

1) Для нахождения параметров b_0, b_1 уравнения степенной регрессии $\hat{y} = b_0 \cdot x^{b1}$ приведем уравнение к линейному виду.

Введем новые переменные

$$Y = \ln \hat{y}, X = \ln x, B_0 = \ln b_0.$$

Тогда уравнение регрессии примет вид

$$Y = B_0 + b_1 \cdot X.$$

Параметры уравнения определим по формулам (необходимые расчеты приведены в табл. 2):

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} = \frac{127{,}41 - \frac{1}{15}\cdot 50{,}96\cdot 37{,}66}{174{,}39 - \frac{1}{15}(50{,}96)^2} = \text{-}0{,}415,$$

$$B_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} = 2{,}51 - (-0{,}415)\cdot 3{,}40 = 3{,}921.$$

Обратный переход к параметру b_0 осуществим по формуле

$$b_0 = e^{B0} = e^{3{,}921} = 50{,}46.$$

Уравнение степенной регрессии имеет вид $\hat{y} = 50{,}46 \cdot x^{-0{,}415}$.

Степенная регрессионная модель имеет вид

$$y = 50{,}46 \cdot x^{-0{,}415} + \varepsilon$$

или

$$y_i = 50{,}46 \cdot x^{-0{,}415} + \varepsilon_i$$

Коэффициент регрессии b1 = -0,415 является средним коэффициентом эластичности. Он показывает, что с увеличением значения Объема продукции на 1% процент Единичные издержки уменьшатся на 0,415%.

Подставляя в полученное уравнение регрессии значения x_i можно определить ***теоретические значения*** $\hat{y}_i$ и построить линию регрессии на корреляционном поле (рис. 1).

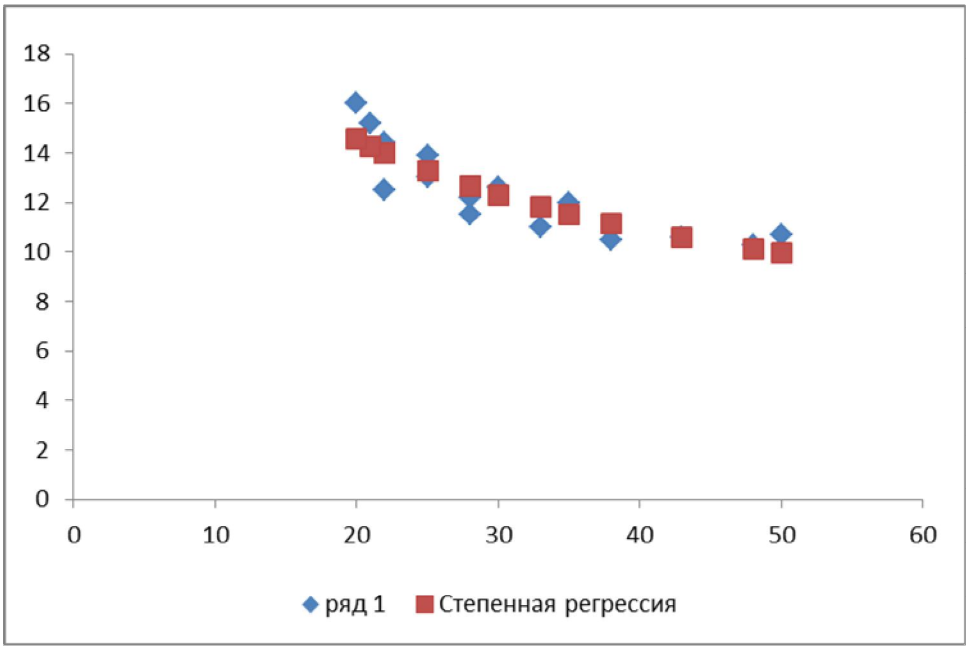

Рис. 1. Линия степенной регрессии на корреляционном поле

Линия степенной регрессии проходит внутри корреляционного поля. Кроме того, число точек корреляционного поля (8), лежащих выше линии регрессии, примерно равно числу точек (7), лежащих ниже линии регрессии. Следовательно, ***линия степенной регрессии занимает правильное положение***.

Таблица 2

Расчетная таблица оценки параметров уравнения степенной регрессии

№ п/п	x_i	y_i	$X_i = \ln x_i$	$Y_i = \ln y_i$	$X_i \cdot Y_i$	X_i^2	$\hat{y}_i$
1	48	10,3	3,87	2,33	9,03	14,99	10,11
2	38	10,5	3,64	2,35	8,55	13,23	11,14
3	43	10,6	3,76	2,36	8,88	14,15	10,59
4	50	10,7	3,91	2,37	9,27	15,30	9,94
5	33	11	3,50	2,40	8,38	12,23	11,82
6	28	11,5	3,33	2,44	8,14	11,10	12,65
7	35	12	3,56	2,48	8,83	12,64	11,53
8	28	12,2	3,33	2,50	8,34	11,10	12,65
9	22	12,5	3,09	2,53	7,81	9,55	13,98
10	30	12,6	3,40	2,53	8,62	11,57	12,29
11	25	13	3,22	2,56	8,26	10,36	13,26
12	25	13,9	3,22	2,63	8,47	10,36	13,26
13	22	14,4	3,09	2,67	8,24	9,55	13,98
14	21	15,2	3,04	2,72	8,29	9,27	14,25
15	20	16	3,00	2,77	8,31	8,97	14,55
Сумма	**468**	**186,40**	**50,96**	**37,66**	**127,41**	**174,39**	**186**
Среднее	**31,2**	**12,43**	**3,40**	**2,51**			**12,4**

2) Теснота нелинейной регрессионной зависимости оценивается с помощью индекса корреляции (корреляционного отношения) (необходимые здесь и далее расчеты приведены в табл. 3):

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{9{,}382}{44{,}569}} = 0{,}889 .$$

Значение ρ близко к 1, следовательно, ***степенная связь между Объемом продукции и Единичными издержками сильная.***

Коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \frac{31{,}908}{44{,}569} = 0{,}716$$

показывает, что в степенной модели ***формирование значений показателя «Единичные издержки» на 71,6% объясняется влиянием фактора «Объем продукции»***. ***Оставшиеся 18,4% приходятся на другие факторы, не включенные в модель.***

Скорректированный коэффициент детерминации равен

$$R^2_{скорр} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0{,}716)\cdot\frac{15-1}{15-1-1} = 0{,}694$$

Таблица 3

Расчетная таблица характеристик степенной модели

№ п/п	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$\left\lvert\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right\rvert$	$(\hat{y}_i - \overline{y})^2$	$(\hat{y}_i - y_i)^2$	$(y_i - \overline{y})^2$	$Э_i$
1	48	10,3	10,11	0,018	5,354	0,035	4,523	-0,415
2	38	10,5	11,14	0,061	1,648	0,413	3,712	-0,415
3	43	10,6	10,59	0,001	3,390	0,000	3,337	-0,415
4	50	10,7	9,94	0,071	6,169	0,573	2,981	-0,415
5	33	11	11,82	0,074	0,374	0,664	2,035	-0,415
6	28	11,5	12,65	0,100	0,050	1,321	0,859	-0,415
7	35	12	11,53	0,039	0,804	0,221	0,182	-0,415
8	28	12,2	12,65	0,037	0,050	0,202	0,051	-0,415
9	22	12,5	13,98	0,119	2,418	2,195	0,005	-0,415
10	30	12,6	12,29	0,024	0,018	0,095	0,030	-0,415
11	25	13	13,26	0,020	0,692	0,067	0,329	-0,415
12	25	13,9	13,26	0,046	0,692	0,411	2,171	-0,415
13	22	14,4	13,98	0,029	2,418	0,175	3,894	-0,415
14	21	15,2	14,25	0,062	3,340	0,895	7,691	-0,415
15	20	16	14,55	0,091	4,491	2,114	12,769	-0,415
Сумма	**468**	**186,40**	**186**	**0,793**	**31,908**	**9,382**	**44,569**	
Среднее	**31,2**	**12,43**	**12,4**	**0,053**	**2,127**	**0,625**	**2,971**	

Оценим качество степенного уравнения регрессии;

Поскольку $\bar{y} = 12{,}43 \approx \bar{\hat{y}} = 12{,}4$ ***расчет параметров проведен верно***.

а) Найдем среднюю относительную ошибку аппроксимации

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}793}{15} \cdot 100\% = 5{,}3\% \; .$$

Так как $\overline{A} < 10\%$, ***уравнение имеет высокую точность***.

б) Проверим статистическую значимость уравнения регрессии в целом с помощью критерия Фишера. Расчетное значение (статистика) критерия Фишера

$$F_{расч} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{31{,}908}{9{,}382} \cdot \frac{15 - 1 - 1}{1} = 44{,}213 \; .$$

Табличное значение критерия Фишера с $df_1 = m = 1$ и $df_2 = n - m - 1 = 15 - 1 - 1 = 13$ степенями свободы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ найдем с помощью встроенной функции Excel «FРАСПОБР». $F_{табл} = 4{,}67$.

Поскольку $F_{расч} > F_{табл}$, ***уравнение степенной регрессии статистически значимо в целом***, т.е. адекватно описывает исходные данные.

в) Средний и частные коэффициенты эластичности в степенной модели

$$\overline{Э} = b_1 \; , \; Э_i = b_1 \; ,$$

постоянные и равны $b_1 = -0{,}415$, т.е. ***с увеличением значения Объема продукции на 1% процент Единичные издержки уменьшатся на 0,415%.***

Показательная регрессия

1) Для нахождения параметров b_0, b_1 уравнения показательной регрессии $\hat{y} = b_0 \cdot b_1^{x}$ приведем уравнение к линейному виду.

Введем новые переменные

$$Y = \ln \hat{y} \; , \; B_0 = \ln b_0 \; , \; B_1 = \ln b_1 \; .$$

Тогда уравнение регрессии примет вид

$$Y = B_0 + B_1 \cdot x \; .$$

Параметры уравнения определим по формулам (необходимые расчеты приведены в табл. 4):

$$B_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{1158{,}63 - \frac{1}{15}\cdot 468 \cdot 37{,}66}{15938 - \frac{1}{15}\cdot 468^2} = \text{-}0{,}012 ,$$

$$B_0 = \overline{Y} - B_1\overline{x} = 2{,}51 - (-0{,}012)\cdot 31{,}2 = 2{,}892 .$$

Обратный переход к параметру b_0 осуществим по формуле

$$b_0 = e^{B0} = e^{2{,}892} = 18{,}02$$

$$b_1 = e^{B1} = e^{-0{,}012} = 0{,}988 .$$

Уравнение показательной регрессии имеет вид $\hat{y} = 18{,}02 \cdot 0{,}988^x$.

Показательная регрессионная модель имеет вид

$$y = 18{,}02 \cdot 0{,}988^x + \varepsilon$$

или

$$y_i = 18{,}02 \cdot 0{,}988^x + \varepsilon_i$$

Подставляя в полученное уравнение регрессии значения x_i можно определить ***теоретические значения*** $\hat{y}_i$ и построить линию регрессии на корреляционном поле (рис. 2).

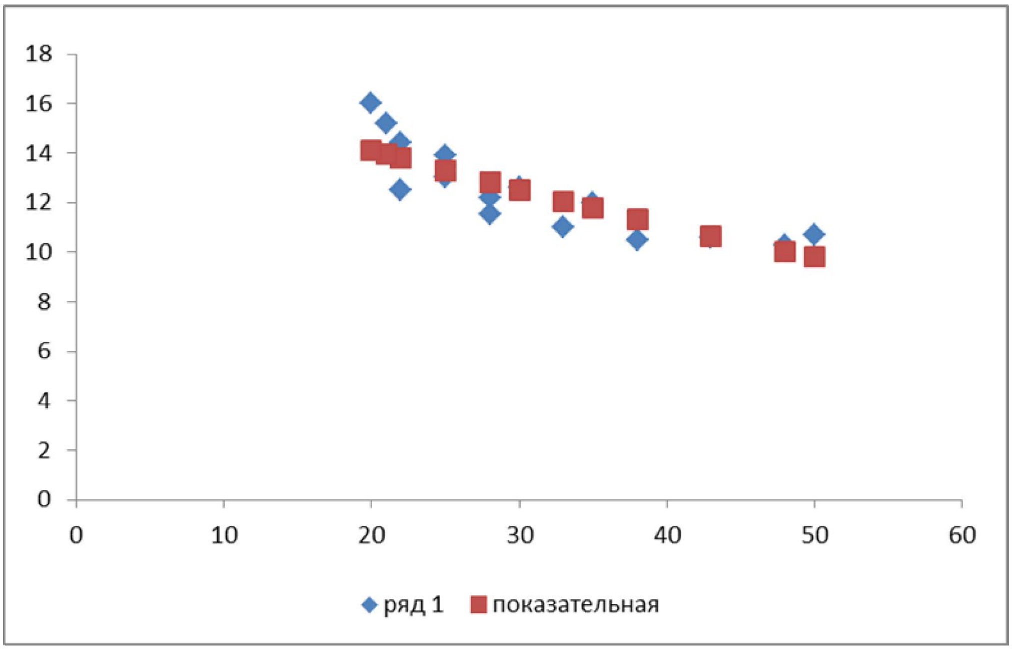

Рис. 2. Линия показательной регрессии на корреляционном поле

Линия показательной регрессии проходит внутри корреляционного поля. Кроме того, число точек корреляционного поля (8), лежащих выше линии регрессии, примерно равно числу точек (7), лежащих ниже линии регрессии. Следовательно, ***линия показательной регрессии занимает правильное положение***.

Таблица 4

Расчетная таблица параметров уравнения показательной регрессии

№ п/п	x_i	y_i	$Y_i = \ln y_i$	$x_i \cdot Y_i$	x_i^2	$\hat{y}_i$
1	48	10,3	2,33	111,94	2304	10,03
2	38	10,5	2,35	89,35	1444	11,33
3	43	10,6	2,36	101,52	1849	10,66
4	50	10,7	2,37	118,51	2500	9,79
5	33	11	2,40	79,13	1089	12,04
6	28	11,5	2,44	68,39	784	12,80
7	35	12	2,48	86,97	1225	11,75
8	28	12,2	2,50	70,04	784	12,80
9	22	12,5	2,53	55,57	484	13,78
10	30	12,6	2,53	76,01	900	12,49
11	25	13	2,56	64,12	625	13,28
12	25	13,9	2,63	65,80	625	13,28
13	22	14,4	2,67	58,68	484	13,78
14	21	15,2	2,72	57,15	441	13,95
15	20	16	2,77	55,45	400	14,12
Сумма	**468**	**186,4**	**37,66**	**1158,63**	**15938**	**185,88**
Среднее	**31,2**	**12,43**	**2,51**			**12,39**

2) Теснота нелинейной регрессионной зависимости оценивается с помощью индекса корреляции (корреляционного отношения) (необходимые здесь и далее расчеты приведены в табл. 5):

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{12,427}{44,569}} = 0,849 \; .$$

Значение ρ близко к 1, следовательно, ***показательная связь между Объемом продукции и Единичными издержками сильная.***

Коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = \frac{28,191}{44,569} = 0,633$$

показывает, что в показательной модели ***формирование значений показателя «Единичные издержки» на 63,3% объясняется влиянием фактора «Объем***

продукции». Оставшиеся 36,7% приходятся на другие факторы, не включенные в модель.

Скорректированный коэффициент детерминации равен

$$R^2_{скорр} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0{,}633)\cdot\frac{15-1}{15-1-1} = 0{,}604$$

Таблица 5

Расчетная таблица характеристик показательной модели

№ п/п	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$\left\lvert\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right\rvert$	$(\hat{y}_i-\bar{y})^2$	$(\hat{y}_i-y_i)^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$Э_i$
1	48	10,3	10,03	0,026	5,752	0,074	4,523	-0,586
2	38	10,5	11,33	0,079	1,201	0,690	3,712	-0,464
3	43	10,6	10,66	0,006	3,122	0,004	3,337	-0,525
4	50	10,7	9,79	0,085	6,971	0,835	2,981	-0,611
5	33	11	12,04	0,095	0,146	1,091	2,035	-0,403
6	28	11,5	12,80	0,113	0,141	1,697	0,859	-0,342
7	35	12	11,75	0,021	0,453	0,061	0,182	-0,427
8	28	12,2	12,80	0,049	0,141	0,363	0,051	-0,342
9	22	12,5	13,78	0,102	1,820	1,628	0,005	-0,269
10	30	12,6	12,49	0,008	0,004	0,011	0,030	-0,366
11	25	13	13,28	0,022	0,729	0,079	0,329	-0,305
12	25	13,9	13,28	0,045	0,729	0,384	2,171	-0,305
13	22	14,4	13,78	0,043	1,820	0,390	3,894	-0,269
14	21	15,2	13,95	0,083	2,306	1,575	7,691	-0,256
15	20	16	14,12	0,118	2,855	3,548	12,769	-0,244
Сумма	**468**	**186,4**	**185,88**	**0,895**	**28,191**	**12,427**	**44,569**	
Среднее	**31,2**	**12,43**	**12,39**	**0,060**	**1,879**	**0,828**	**2,971**	

Оценим качество показательного уравнения регрессии;

Поскольку $\bar{y} = 12{,}43 \approx \bar{\hat{y}} = 12{,}39$ ***расчет параметров проведен верно***.

а) Найдем среднюю относительную ошибку аппроксимации

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i-\hat{y}_i}{y_i}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}895}{15}\cdot 100\% = 6\% \ .$$

Так как $\bar{A} < 10\%$, ***уравнение имеет высокую точность***.

б) Проверим статистическую значимость уравнения регрессии в целом с помощью критерия Фишера. Расчетное значение (статистика) критерия Фишера

$$F_{расч} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-y_i\right)^2}\cdot\frac{n-m-1}{m} = \frac{28{,}191}{12{,}427}\cdot\frac{15-1-1}{1} = 29{,}49 \ .$$

Табличное значение критерия Фишера с $df_1 = m = 1$ и $df_2 = n - m - 1 = 15 - 1 - 1 = 13$ степенями свободы при уровне значимости $\alpha = 0,05$ найдем с помощью встроенной функции Excel «FРАСПОБР». $F_{табл} = 4,67$.

Поскольку $F_{расч} > F_{табл}$, ***уравнение показательной регрессии статистически значимо в целом***, т.е. адекватно описывает исходные данные.

в) Средний и частные коэффициенты эластичности в показательной модели найдем по формулам

$$\overline{Э} = \overline{x}\ln b_1 = 31,2 \cdot -0,012 \approx -0,381$$

$$Э_i = x_i \cdot \ln b_1 = -0,012 \cdot x_i$$

Средний коэффициент эластичности показывает, что при увеличении с увеличением значения Объема продукции на 1% процент Единичные издержки уменьшатся на 0,381%.

Для 1-4-го наблюдений увеличение показателя «Объем продукции» на 1% приводит к наибольшему увеличению процента Единичных издержек, чем в целом по группе наблюдений ($Э_1$= -0,586, $Э_2$= -0,464, $Э_3$= -0,525, $Э_4$= -0,611) (для данных наблюдений влияние x на y наибольшее).

Другими словами, в рамках построенной показательной модели, для большего значения Объема продукции влияние Издержек наибольшее

Необходимо отметить, что среднее значение, вычисленное по столбцу частных коэффициентов эластичности, как правило, не совпадает со значением среднего коэффициента эластичности. Для анализа необходимо использовать средний коэффициент эластичности, вычисленный по формуле.

Гиперболическая регрессия

1) Для нахождения параметров b_0, b_1 уравнения гиперболической регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$ приведем уравнение к линейному виду.

Введем новую переменную

$$X = \frac{1}{x}.$$

Тогда уравнение регрессии примет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot X \ .$$

Параметры уравнения определим по формулам (необходимые расчеты приведены в табл. 6):

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} = \frac{6{,}717 - \frac{1}{15}\cdot 0{,}523 \cdot 186{,}4}{0{,}02 - \frac{1}{15}\cdot 0{,}523^2} = 163{,}96 \ ,$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{X} = 12{,}427 - (163{,}96)\cdot 0{,}035 = 6{,}71 \, .$$

Уравнение гиперболической регрессии имеет вид $\hat{y} = 6{,}71 + 163{,}96 \cdot \frac{1}{x}$.

Гиперболическая регрессионная модель имеет вид

$$y = 6{,}71 + 163{,}96 \cdot \frac{1}{x} + \varepsilon$$

или

$$y_i = 6{,}71 + 163{,}96 \cdot \frac{1}{x_i} + \varepsilon_i$$

Подставляя в полученное уравнение регрессии значения x_i можно определить ***теоретические значения*** $\hat{y}_i$ и построить линию регрессии на корреляционном поле (рис. 3).

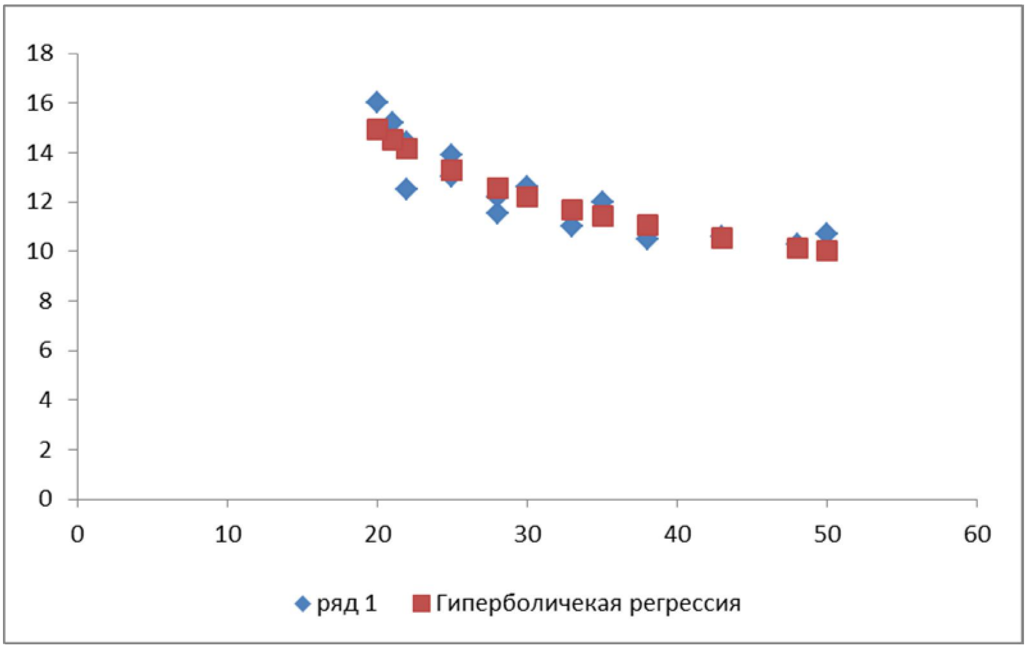

Рис. 3. Линия гиперболической регрессии на корреляционном поле

Линия показательной регрессии проходит внутри корреляционного поля. Кроме того, число точек корреляционного поля (8), лежащих выше линии регрессии, примерно равно числу точек (7), лежащих ниже линии регрессии. Следовательно, линия регрессии занимает правильное положение.

Таблица 6

Расчетная таблица параметров уравнения гиперболической регрессии

№ п/п	x_i	y_i	$X_i = \frac{1}{x_i}$	$X_i \cdot y_i$	X_i^2	$\hat{y}_i$
1	48	10,3	0,021	0,215	0,0004	10,13
2	38	10,5	0,026	0,276	0,0007	11,03
3	43	10,6	0,023	0,247	0,0005	10,53
4	50	10,7	0,020	0,214	0,0004	9,99
5	33	11	0,030	0,333	0,0009	11,68
6	28	11,5	0,036	0,411	0,0013	12,57
7	35	12	0,029	0,343	0,0008	11,40
8	28	12,2	0,036	0,436	0,0013	12,57
9	22	12,5	0,045	0,568	0,0021	14,17
10	30	12,6	0,033	0,420	0,0011	12,18
11	25	13	0,040	0,520	0,0016	13,27
12	25	13,9	0,040	0,556	0,0016	13,27
13	22	14,4	0,045	0,655	0,0021	14,17
14	21	15,2	0,048	0,724	0,0023	14,52
15	20	16	0,050	0,800	0,0025	14,91
Сумма	**468**	**186,4**	**0,523**	**6,717**	**0,020**	**186,4**
Среднее	**31,2**	**12,427**	**0,035**			**12,427**

2) Теснота нелинейной регрессионной зависимости оценивается с помощью индекса корреляции (корреляционного отношения) (необходимые здесь и далее расчеты приведены в табл. 7):

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{8,043}{44,569}} = 0,905 \ .$$

Значение ρ одинаково близко к 1, следовательно, ***гиперболическая связь между Объемом продукции и Единичными издержками сильная.***

Коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \frac{36,526}{44,569} = 0,820$$

показывает, что в гиперболической модели ***формирование значений показателя «Единичные издержки» на 82% объясняется влиянием фактора «Объем продукции». Оставшиеся 18% приходятся на другие факторы, не включенные в модель.***

Скорректированный коэффициент детерминации равен

$$R^2_{скорр} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0{,}82) \cdot \frac{15-1}{15-1-1} = 0{,}806$$

Таблица 7

Расчетная таблица характеристик гиперболической модели

№ п/п	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$\left\lvert \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right\rvert$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - y_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$Э_i$
1	48	10,3	10,13	0,016	5,273	0,029	4,523	-0,337
2	38	10,5	11,03	0,050	1,953	0,280	3,712	-0,391
3	43	10,6	10,53	0,007	3,606	0,005	3,337	-0,362
4	50	10,7	9,99	0,066	5,919	0,499	2,981	-0,328
5	33	11	11,68	0,062	0,553	0,467	2,035	-0,425
6	28	11,5	12,57	0,093	0,021	1,146	0,859	-0,466
7	35	12	11,40	0,050	1,056	0,361	0,182	-0,411
8	28	12,2	12,57	0,030	0,021	0,137	0,051	-0,466
9	22	12,5	14,17	0,133	3,030	2,780	0,005	-0,526
10	30	12,6	12,18	0,033	0,061	0,176	0,030	-0,449
11	25	13	13,27	0,021	0,716	0,075	0,329	-0,494
12	25	13,9	13,27	0,045	0,716	0,393	2,171	-0,494
13	22	14,4	14,17	0,016	3,030	0,054	3,894	-0,526
14	21	15,2	14,52	0,045	4,392	0,459	7,691	-0,538
15	20	16	14,91	0,068	6,180	1,182	12,769	-0,550
Сумма	**468**	**186,4**	**186,4**	**0,737**	**36,526**	**8,043**	**44,569**	
Среднее	**31,2**	**12,427**	**12,427**	**0,049**	**2,435**	**0,536**	**2,971**	

Оценим качество гиперболического уравнения регрессии;

Поскольку $\bar{y} = 12{,}427 = \bar{\hat{y}} = 12{,}427$ ***расчет параметров проведен верно***.

а) Найдем среднюю относительную ошибку аппроксимации

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right\rvert \cdot 100\% = \frac{0{,}737}{15} \cdot 100\% = 4{,}9\% \ .$$

Так как $\bar{A} < 10\%$, ***уравнение имеет высокую точность***.

б) Проверим статистическую значимость уравнения регрессии в целом с помощью критерия Фишера. Расчетное значение (статистика) критерия Фишера

$$F_{расч} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{36{,}526}{8{,}043} \cdot \frac{15-1-1}{1} = 59{,}04 \ .$$

Табличное значение критерия Фишера с $df_1 = m = 1$ и $df_2 = n - m - 1 = 15 - 1 - 1 = 13$ степенями свободы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ найдем с помощью встроенной функции Excel «FРАСПОБР». $F_{табл} = 4{,}67$.

Поскольку $F_{расч} > F_{табл}$, ***уравнение показательной регрессии статистически значимо в целом***, т.е. адекватно описывает исходные данные.

в) Средний и частные коэффициенты эластичности в гиперболической модели найдем по формулам

$$\overline{Э} = -\frac{b_1}{b_0 \cdot \overline{x} + b_1} = -\frac{163{,}96}{6{,}71 \cdot 31{,}2 + 163{,}96} = -0{,}439 \approx -0{,}44$$

$$Э_i = -\frac{b_1}{b_0 \cdot x_i + b_1} = -\frac{163{,}96}{6{,}71 \cdot x_i + 163{,}96}$$

Необходимо отметить, что среднее значение, вычисленное по столбцу частных коэффициентов эластичности, не совпадает со значением среднего коэффициента эластичности. Для анализа необходимо использовать средний коэффициент эластичности, вычисленный по формуле.

Средний коэффициент эластичности показывает, что при увеличении с увеличением значения Объема продукции на 1% процент Единичные издержки уменьшатся на 0,44%.

Анализ значений частных коэффициентов эластичности показывает, что для 11-15-го наблюдений показатель «Объем продукции» имеет наибольшее влияние на показатель «Единичные издержки»

Для 4-го наблюдения увеличение показателя «Объем продукции» на 1% приводит к наименьшему увеличению процента Единичных издржек, чем в целом по группе наблюдений ($Э_4$=-0,328).

3) Выберем наилучшее из построенных уравнений.

Постоим линии регрессии на одном корреляционном поле

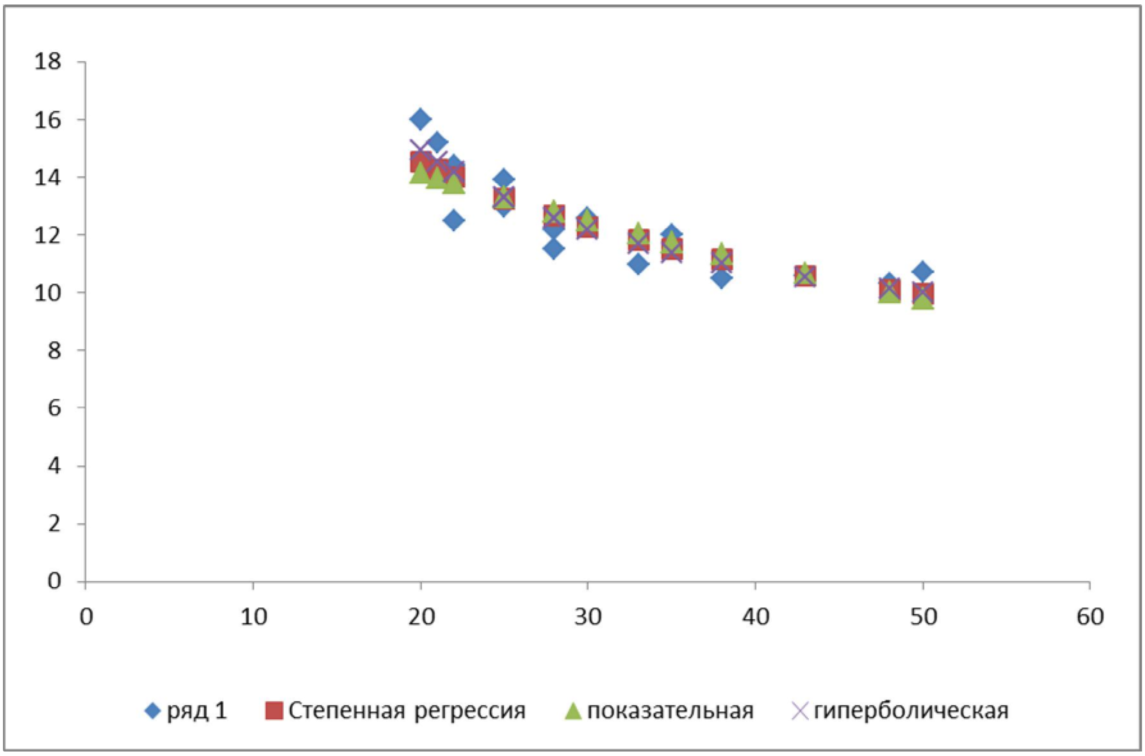

Рис. 4. Линии регрессии на корреляционном поле

Таблица 8

Характеристики регрессионных моделей

Вид регрессии	Средняя относительная ошибка аппроксимации, $\overline{A}$	Индекс корреляции, ρ	F-статистика	Скорректированный коэффициент детерминации, $R^2_{скорр}$
степенная	5,28%	0,889	44,213	0,694
показательная	5,97%	0,849	29,490	0,604
гиперболическая	4,91%	0,905	59,036	0,806

Гиперболическая модель имеет наилучшие значения модельных характеристик: наименьшую среднюю ошибку аппроксимации (наилучшая математическая точность); наибольший индекс корреляции (наиболее сильная нелинейная связь); наибольшее расчетное значение критерия Фишера (наиболее адекватное описание исходных данных).

Для практического применения следует использовать выводы о степени влияния объема продукции на издержки, сделанные по коэффициентам эластичности, которые вычислены для гиперболической модели.